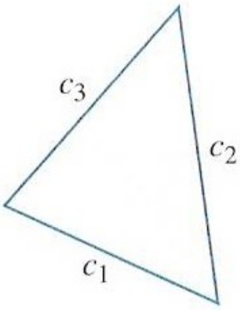
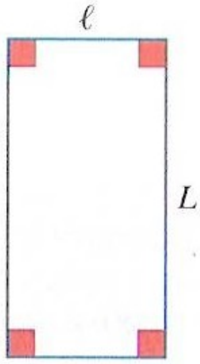
AIRES et VOLUMES usuels

Surfaces usuelles planes

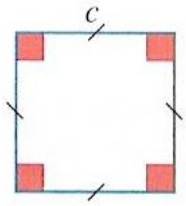
- **Périmètre d'un polygone** : c'est la somme des longueurs de tous les côtés.



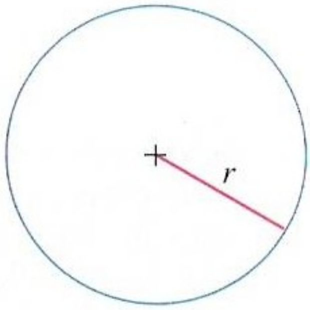
Triangle
$p = c_1 + c_2 + c_3$



Rectangle
$p = (L + \ell) \times 2$



Carré
$p = c \times 4$

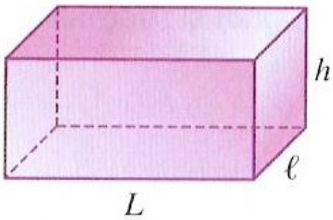


Cercle – Disque
$p = 2\pi r$
avec
$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 5\ldots$

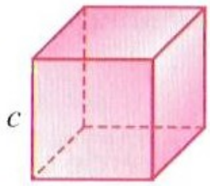
- **Aire**

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ $\qquad \mathcal{A} = L \times \ell$ $\qquad \mathcal{A} = c^2$ $\qquad \mathcal{A} = \pi r^2$

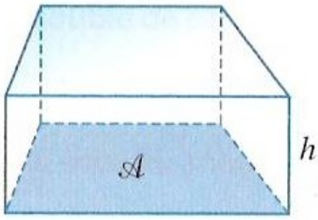
Solides usuels



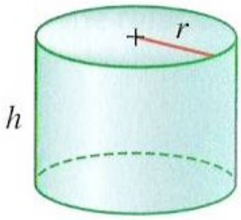
Parallélépipède rectangle
$V = L \times \ell \times h$



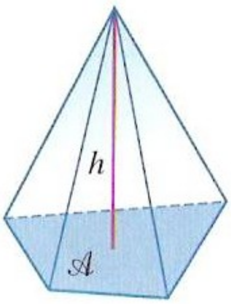
Cube
$V = c^3$



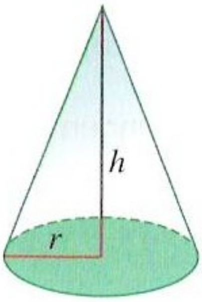
Prisme droit
$V = \mathcal{A} \times h$



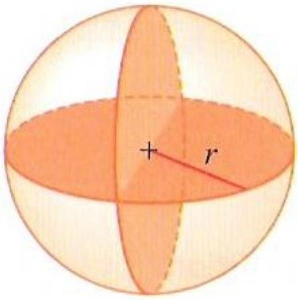
Cylindre droit
$V = \pi r^2 h$



Pyramide
$V = \dfrac{\mathcal{A} \times h}{3}$



Cône
$V = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

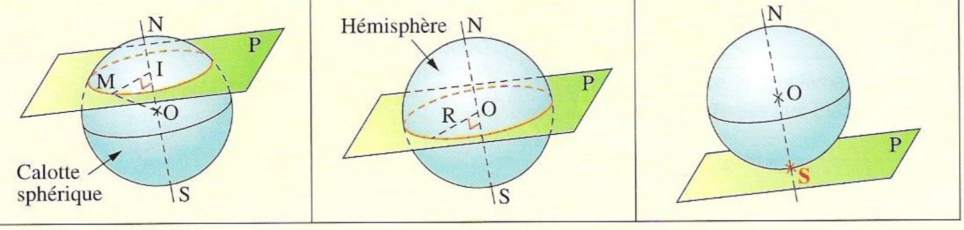


Boule – Sphère
$\mathcal{A} = 4\pi r^2 \qquad V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

Section d'une sphère par un plan :

[NS] est un diamètre d'une sphère de centre O et P est le plan perpendiculaire à [NS] en I : on dit que **OI est la distance de O au plan P**.

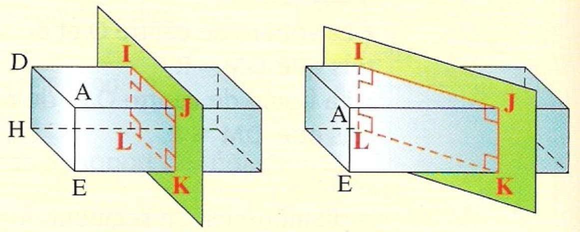
Cas $0 < OI < R$	Cas $OI = 0$	Cas $OI = R$
Le cercle de section a pour centre I. Pour tout point M de ce cercle, le triangle OIM est rectangle en I.	Le cercle de section a même centre O et même rayon R que la sphère : on dit que c'est **un grand cercle de la sphère**.	Le cercle de section a pour centre S (ou N) et pour rayon 0. On dit que **le plan P est tangent à la sphère en S** (ou N).



Section d'un parallélépipède par un plan :

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan :

- parallèle à une face est un rectangle
- parallèle à une arête est un rectangle.

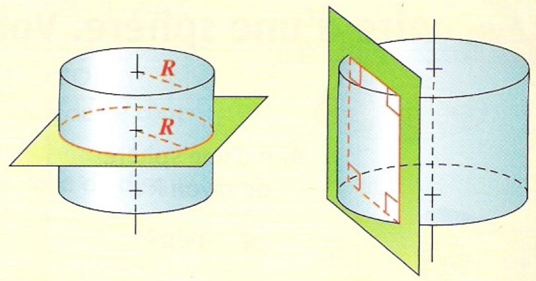


Plan parallèle à la face ADHE. **Plan parallèle à l'arête [AE].**

Section d'un cylindre par un plan :

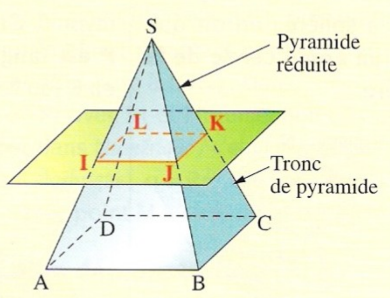
La section d'un cylindre de révolution de rayon R par un plan :

- perpendiculaire à l'axe est un cercle de rayon R dont le centre appartient à cet axe
- parallèle à l'axe est un rectangle.

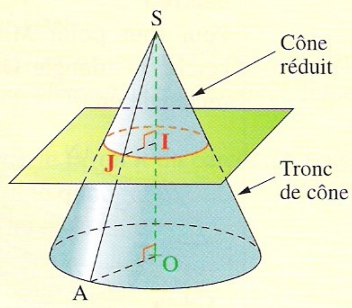


Plan perpendiculaire à l'axe. **Plan parallèle à l'axe.**

Section d'une pyramide et d'un cône par un plan :



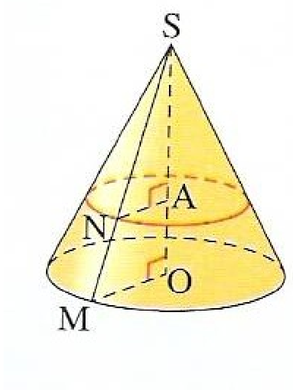
Rapport de réduction : $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{IJ}{AB} \ldots$



Rapport de réduction : $\frac{SI}{SO} = \frac{SJ}{SA} = \frac{IJ}{OA} \ldots$

Exercice « type brevet » :

Un cône de révolution de sommet S a pour base un disque de centre O et de rayon 5cm.
De plus SO = 10 cm.
A est un point de la hauteur [SO] tel que : SA = 7 cm.
Le plan perpendiculaire à [SO] coupe une génératrice [SM] en N.



a) *Calculer le volume du cône initial en cm³.*

$$V = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 10}{3} = \mathbf{\frac{250}{3}\pi\ (cm^3)} \quad \underline{\mathbf{\approx 262\ cm^3}}$$

b) *Calculer le rapport de réduction du grand cône au petit cône obtenu par la section.*

On sait que les triangles SAN et SAO sont en situation de Thalès avec les droites (AN) et (OM) parallèles.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM} = \frac{SN}{SM}$

Le coefficient de réduction est : $k = \frac{SA}{SO} = \frac{7}{10} = \mathbf{\underline{0,7}}$

c) *Calculer le rayon de la section de ce cône.*

La section de ce cône par ce plan est un cercle réduction de la base.

Rapport de réduction : $k = \frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM} = 0,7$

D'où : $\frac{AN}{5} = 0,7$ et $AN = 5 \times 0,7 = 3,5$ cm .

Donc le **rayon de la section du cône est de 3,5 cm.**

d) *Calculer l'aire de la section par 2 méthodes.*

Méthode 1 : $A = \pi R^2 = \pi\,(AN)^2 = \pi\, 3,5^2 = 12,25\pi$ (cm²)

Méthode 2 : Aire section = Aire base × (Rapport réduction)² = $\pi \times 5^2 \times 0,7^2$ = **12,25π (cm²)**

a) *Calculer le volume du petit cône.*

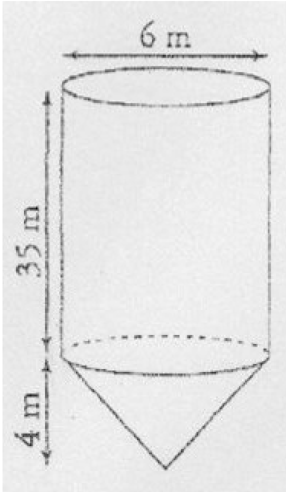
Méthode 1 : $V = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 3,5^2 \times 7}{3} = \mathbf{\frac{85,75}{3}\pi\ (cm^3) \approx 90\ cm^3}$

Méthode 2 : $V_{section} = V_{départ} \times (\text{Rapport réduction})^3 = \frac{250}{3}\pi \times 0,7^3\ (cm^3) \approx 90\ cm^3$

Exercices d'application

Exercice 1 :

On s'intéresse dans cet exercice au réservoir de la fusée XYZ2005, nouveau prototype de fusée interplanétaire.
Ce réservoir est constitué d'un cône surmonté d'un cylindre, comme le montre le dessin ci contre.
Le diamètre du réservoir est de 6 m, le cylindre mesure 35 m de hauteur et le cône 4 m de hauteur.



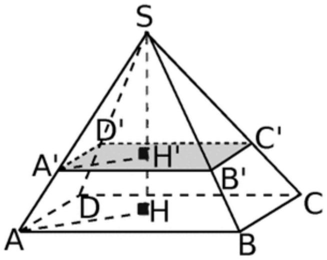
1. Calculer le volume total du réservoir ; on donnera d'abord la valeur exacte en m^3, puis la valeur en dm^3, arrondie au dm^3.

2. Le volume de ce réservoir est il suffisant pour que les moteurs de la fusée fonctionnent pendant 10 minutes, sachant que ces moteurs consomment 1 500 litres de carburants par seconde ?

Exercice 2 :

On réalise la section d'une pyramide SABCD à base rectangulaire par un plan parallèle à sa base et passant par A'.

AB = 6,4 cm
BC = 4,8 cm
A'H' = 1,5 cm
SH = 15 cm



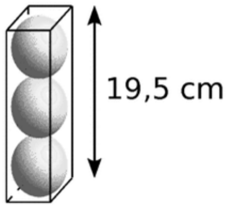
a. Calcule AH.

b. Quel est le coefficient de réduction entre les pyramides SABCD et SA'B'C'D' ?

c. Calcule les valeurs exactes des volumes des deux pyramides.

Exercice 3 :

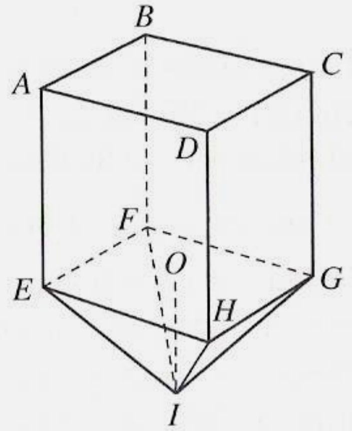
Une boîte de forme parallélépipédique contient trois balles de tennis comme indiqué dans la figure ci-contre.
Calcule le pourcentage, arrondi à l'unité, du volume de la boîte occupé par les balles.



Exercices Brevet

Première partie

Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle (voir figure).
$AB = BC = 2$ m.
$AE = 5$ m, $OI = 1,5$ m,
(OI) est la hauteur de la pyramide.



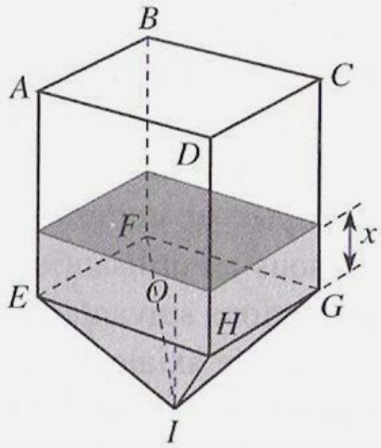
1. Calculer le volume de la pyramide en m^3.

2. Calculer le volume du parallélépipède rectangle en m^3.

3. En déduire le volume du réservoir lorsqu'il est plein.

Seconde partie

On remplit d'eau ce réservoir. La partie pyramidale étant entièrement pleine, on appelle x la hauteur d'eau dans le parallélépipède rectangle.



1. Quelles sont les valeurs de x possibles ? Donner la réponse sous forme d'un encadrement de x.

2. Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau dans le parallélépipède.

3. Montrer que le volume d'eau dans le réservoir est donné par la fonction affine V définie par $V(x) = 4x + 2$.

4. Représenter graphiquement cette fonction affine V en prenant 1 cm pour 0,5 m en abscisse et 1 cm pour 2 m^3 en ordonnée.

5. Lire, sur le graphique, une valeur de x telle que le volume d'eau égale 12 m^3.

6. Trouver par le calcul le volume d'eau dans le réservoir lorsque x vaut 1,8 m. Quel est alors le pourcentage de remplissage du réservoir ? (Arrondir à l'unité.)